Développements limités

Chapitre 5

I. Egalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \to \mathbb{R}), a \in I$,

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \frac{(x-a)^k}{k!}}_{\substack{\text{Développement de Taylor} \\ T_a^p f(x)}} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{\text{reste intégrale}}}$$

II. Inégalité de Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \to \mathbb{R}), a \in I, M$ majorant d�$f^{(n+1)}$,

$$\boxed{f(x) - T_a^p f(x) \leq M \frac{x-a}{(n+1)!}}$$

III. Développement limité en a d'une fonction

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \to \mathbb{R}), a \in I$,
$\exists\ DL_n(a)$ t.q. au voisinag�d�a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \frac{(x-a)^k}{k!} + \underbrace{\varepsilon(x)(x-a)^n}_{\underset{a}{\to} 0}}$$

IV. Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$